

7 Meetkunde met coördinaten

Voorkennis Stelsels vergelijkingen

Bladzijde 93

1 a $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 20x - 15y = 30 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 20x - 28y = 4 \\ -20x + 15y = -30 \\ \hline -13y = -26 \\ y = 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 5x - 7 \cdot 2 = 1 \\ 5x - 14 = 1 \\ 5x = 15 \\ x = 3 \end{cases}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 2)$.

b $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 45 \\ 10x - 9y = -5 \\ \hline 16x = 40 \\ x = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 3y = 15 \\ 5 + 3y = 15 \\ 3y = 10 \\ y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

De oplossing is $(x, y) = (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3})$.

c $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = 48 \\ 6x + 8y = 20 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 6x - 15y = 48 \\ -6x - 8y = -20 \\ \hline -23y = 28 \\ y = -1\frac{5}{23} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x - 5 \cdot -1\frac{5}{23} = 16 \\ 2x + 6\frac{2}{23} = 16 \\ 2x = 9\frac{21}{23} \\ x = 4\frac{22}{23} \end{cases}$$

De oplossing is $(x, y) = (4\frac{22}{23}, -1\frac{5}{23})$.

2 a $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 4y = 11 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ x - 4y = 11 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 10 \\ -6x + 16y = 66 \\ \hline 12y = 76 \\ y = 6\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + 2 \cdot 6\frac{2}{3} = 5 \\ 3x + 8 = 5 \\ 3x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Dus $P(3, -2)$.

b $\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 12x - 15y = 18 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 12x - 15y = 18 \\ -12x + 8y = -4 \\ \hline -7y = 14 \\ y = -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 4x - 5 \cdot (-2) = 6 \\ 4x + 10 = 6 \\ 4x = -4 \\ x = -1 \end{cases}$$

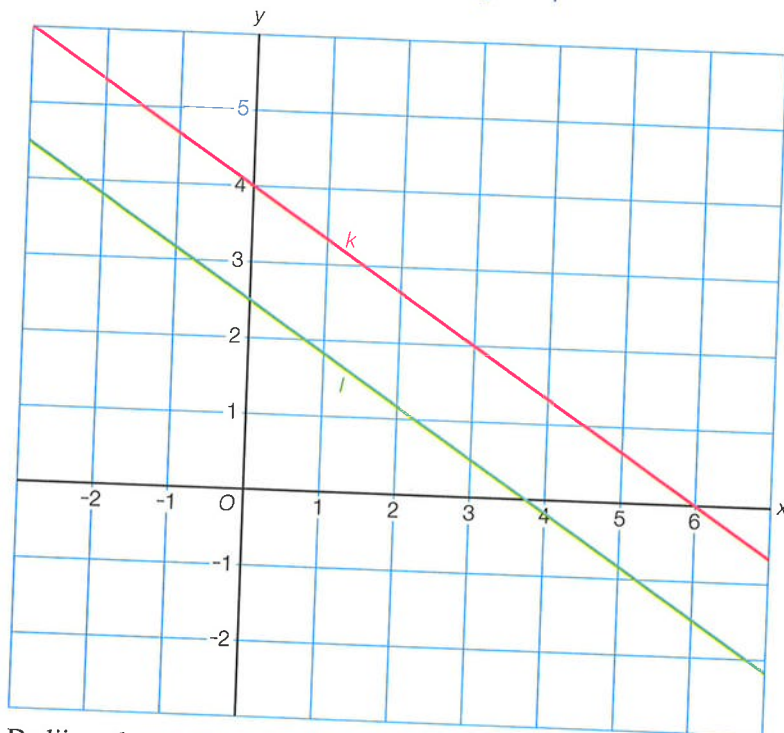
Dus $Q(-1, -2)$.

7.1 Lijnen en hoeken

Bladzijde 94

1 a $k: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 6 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$

$l: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3\frac{3}{4} \\ \hline y & 2\frac{1}{2} & 0 \end{array}$



- b De lijnen k en l zijn evenwijdig en vallen niet samen, dus hebben geen punt gemeenschappelijk.
Dus het stelsel heeft geen oplossing.

c $k: 2x + 3y = 12$ $l: 4x + 6y = 15$
 $3y = -2x + 12$ $6y = -4x + 15$
 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{2}$

Je ziet $rc_k = rc_l$, dus $k \parallel l$.

Bladzijde 95

- 2 a Voor $p = \frac{1}{3}$ en $q \neq -10$ zijn de lijnen evenwijdig.
 b Voor $p \neq \frac{1}{3}$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ hebben de lijnen een snijpunt.
 c $(2, -3)$ op k_p geeft $2p - 3(p + 1) = 5$
 $2p - 3p - 3 = 5$
 $-p = 8$
 $p = -8$
 $p = -8$ geeft $l_q: -9x - 11y = q$
 $(2, -3)$ op l_q geeft $q = -9 \cdot 2 - 11 \cdot -3 = 15$.
 Dus voor $p = -8$ en $q = 15$ snijden de lijnen elkaar in het punt $(2, -3)$.

3 a Samenvallen, dus $\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4} = \frac{5}{q}$.

$$\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4} \text{ geeft } p(p-1) = 3(p+4)$$

$$p^2 - p = 3p + 12$$

$$p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$(p+2)(p-6) = 0$$

$$p = -2 \vee p = 6$$

$p = -2$ geeft $\frac{3}{-3} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{q}$ oftewel $-1 = \frac{5}{q}$, dus $q = -5$.

$p = 6$ geeft $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5}{q}$ oftewel $3q = 25$, dus $q = 8\frac{1}{3}$.

Dus voor $p = -2$ en $q = -5$ en voor $p = 6$ en $q = 8\frac{1}{3}$ vallen de lijnen samen.

- b** Voor $p = -2$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ en voor $p = 6$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ zijn de lijnen evenwijdig.

4 Samenvallen, dus $\frac{p}{q+3} = \frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$.

Uit $\frac{p}{q+3} = \frac{4}{1}$ volgt $p = 4(q+3)$ oftewel $p = 4q + 12$.

Uit $\frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$ volgt $q = 4(p-1)$ oftewel $q = 4p - 4$.

Substitutie van $p = 4q + 12$ in $q = 4p - 4$ geeft $q = 4(4q + 12) - 4$

$$q = 16q + 48 - 4$$

$$-15q = 44$$

$$q = -2\frac{14}{15}$$

$q = -2\frac{14}{15}$ geeft $p = 4 \cdot -2\frac{14}{15} + 12 = \frac{4}{15}$

Dus voor $p = \frac{4}{15}$ en $q = -2\frac{14}{15}$ vallen de lijnen samen.

5 a $y = 0$ geeft $2x = 18$
 $x = 9$

Dus het snijpunt met de x -as is $(9, 0)$.

$x = 0$ geeft $3y = 18$
 $y = 6$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 6)$.

b Bij $2x + 3y = 18$ het linker- en rechterlid delen door 18 geeft $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$.

c In de noemer van de breuk $\frac{x}{9}$ staat de x -coördinaat van het snijpunt met de x -as.

In de noemer van de breuk $\frac{y}{6}$ staat de y -coördinaat van het snijpunt met de y -as.

6 a $\left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{x}{a} + 0 = 1 \\ \frac{x}{a} = 1 \\ x = a \end{array}$

Dus het snijpunt met de x -as is $(a, 0)$.

b $\left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{y}{b} = 1 \\ y = b \end{array}$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, b)$.

Bladzijde 96

7 a $l: \frac{x}{p} + \frac{y}{5} = 1$

$l: 5x + py = 5p$

b $m: \frac{x}{4} + \frac{y}{q} = 1$

$m: qx + 4y = 4q$

c $n: \frac{x}{3r} + \frac{y}{r} = 1$

$n: x + 3y = 3r$

8 a $k: \frac{x}{p} + \frac{y}{8} = 1$

$k: 8x + py = 8p$

b $k: 8x + py = 8p$
 door $(1, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot 1 + p \cdot 2 = 8p \\ 8 + 2p = 8p \\ -6p = -8 \\ p = 1\frac{1}{3} \end{array} \right.$

c $k: 8x + py = 8p$ en $l: 2x - y = -3$

$k \parallel l$ geeft $\frac{8}{2} = \frac{p}{-1} \neq \frac{8p}{-3}$

$\frac{8}{2} = \frac{p}{-1}$ geeft $p = -4$ en $p = -4$ geeft $\frac{8}{2} = \frac{-4}{-1} \neq \frac{-32}{-3}$.

Dus voor $p = -4$ is $k \parallel l$.

Bladzijde 97

9 a $k: \frac{x}{3} + \frac{y}{p} = 1$

$k: px + 3y = 3p$

$l: \frac{x}{2p} + \frac{y}{5} = 1$

$l: 5x + 2py = 10p$

b $k: px + 3y = 3p$
 door $A(1, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} p \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3p \\ p + 6 = 3p \\ -2p = -6 \\ p = 3 \end{array} \right.$

$l: 5x + 2py = 10p$
 door $A(1, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 1 + 2p \cdot 2 = 10p \\ 5 + 4p = 10p \\ -6p = -5 \\ p = \frac{5}{6} \end{array} \right.$

c $k: px + 3y = 3p$ en $m: 4x - y = -5$

$k \parallel m$ geeft $\frac{p}{4} = \frac{3}{-1} \neq \frac{3p}{-5}$

$\frac{p}{4} = \frac{3}{-1}$ geeft $p = -12$ en $p = -12$ geeft $\frac{-12}{4} = \frac{3}{-1} \neq \frac{-36}{-5}$.

Dus voor $p = -12$ is $k \parallel m$.

d $l: 5x + 2py = 10p$ en $n: 2x + 3y = 10$

$l \parallel n$ geeft $\frac{5}{2} = \frac{2p}{3} \neq \frac{10p}{10}$

$\frac{5}{2} = \frac{2p}{3}$ geeft $4p = 15$ oftewel $p = 3\frac{3}{4}$ en $p = 3\frac{3}{4}$ geeft $\frac{5}{2} = \frac{7\frac{1}{2}}{3} \neq \frac{37\frac{1}{2}}{10}$.

Dus voor $p = 3\frac{3}{4}$ is $l \parallel n$.

10 a $l_p: \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1$
 door $(3, 4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{p} + \frac{4}{p+2} = 1 \\ 3(p+2) + 4p = p(p+2) \\ 3p + 6 + 4p = p^2 + 2p \\ p^2 - 5p - 6 = 0 \\ (p+1)(p-6) = 0 \\ p = -1 \vee p = 6 \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 \text{b } \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} &= 1 \\
 (p+2)x + py &= p(p+2) \\
 py &= -(p+2)x + p(p+2) \\
 y &= -\frac{p+2}{p} \cdot x + p+2 \\
 \text{rc} = 2 \text{ geeft } -\frac{p+2}{p} &= 2 \\
 p+2 &= -2p \\
 3p &= -2 \\
 p &= -\frac{2}{3} \text{ vold.}
 \end{aligned}$$

$$11 \text{ a } \tan(\angle CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\angle CAB = 63,4349\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle CAB \approx 63,435^\circ.$$

b De tangens van de hoek tussen l en de x -as is $\frac{1}{4}$.
Dit geeft dat de hoek gelijk is aan $14,0362\dots^\circ$.

c Dus de hoek tussen k en l is $63,4349\dots^\circ + 14,0362\dots^\circ \approx 77,5^\circ$.

Bladzijde 99

12 Als de eenheden langs de assen verschillend zijn, dan maakt bijvoorbeeld de lijn $y = x$ geen hoek van 45° met de x -as, maar is elke hoek mogelijk.

$$13 \text{ a } k: y = 3x + 4$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 3 \text{ geeft } \alpha = 71,56\dots^\circ$$

$$l: y = 2x - 1$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 2 \text{ geeft } \beta = 63,43\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 71,56\dots^\circ - 63,43\dots^\circ \approx 8^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) \approx 8^\circ.$$

$$\text{b } m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_m = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 56,30\dots^\circ$$

$$n: y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - (-26,56\dots^\circ) \approx 83^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(m, n) \approx 83^\circ.$$

$$\text{c } p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_p = 3\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 74,05\dots^\circ$$

$$q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_q = -1\frac{1}{4} \text{ geeft } \beta = -51,34\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 74,05\dots^\circ - (-51,34\dots^\circ) \approx 125^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(p, q) \approx 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

$$14 \text{ a } k: 3x - 2y = 5$$

$$-2y = -3x + 5$$

$$y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 56,30\dots^\circ$$

$$l: 4x - 3y = 6$$

$$-3y = -4x + 6$$

$$y = 1\frac{1}{3}x - 2$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{3} \text{ geeft } \beta = 53,13\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - 53,13\dots^\circ \approx 3,2^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) \approx 3,2^\circ.$$

b $m: 4x + y = 1$
 $y = -4x + 1$
 $\tan(\alpha) = rc_m = -4$ geeft $\alpha = -75,96...^\circ$
 $n: 3x + 4y = 2$
 $4y = -3x + 2$
 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = rc_n = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86...^\circ$
 $\beta - \alpha = -36,86...^\circ - (-75,96...^\circ) \approx 39,1^\circ$
Dus $\angle(m, n) \approx 39,1^\circ$.

c $p: 5x + 3y = 4$
 $3y = -5x + 4$
 $y = -1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$
 $\tan(\alpha) = rc_p = -1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -59,03...^\circ$
 $q: 6x - 5y = 1$
 $-5y = -6x + 1$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$
 $\tan(\beta) = rc_q = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19...^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19...^\circ - (-59,03...^\circ) \approx 109,2^\circ$
Dus $\angle(p, q) \approx 180^\circ - 109,2^\circ = 70,8^\circ$.

15 a $k: y = \frac{2}{3}x + 4$
 $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,69...^\circ$
 $l: 6x - 5y = 3$
 $-5y = -6x + 3$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$
 $\tan(\beta) = rc_l = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19...^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19...^\circ - 33,69...^\circ \approx 16,5^\circ$
Dus $\angle(k, l) \approx 16,5^\circ$.

b $rc_m = \frac{0-5}{4-0} = -1\frac{1}{4}$
 $\tan(\alpha) = -1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = -51,34...^\circ$
 $rc_n = \frac{1-0}{0-2} = \frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ geeft $\beta = 26,56...^\circ$
 $\beta - \alpha = 26,56...^\circ - (-51,34...^\circ) \approx 77,9^\circ$
Dus $\angle(m, n) \approx 77,9^\circ$.

c $rc_p = \frac{6-1}{5-2} = 1\frac{2}{3}$
 $\tan(\alpha) = 1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 59,03...^\circ$
 $rc_q = \frac{-6-1}{2-(-3)} = -1\frac{2}{5}$
 $\tan(\beta) = -1\frac{2}{5}$ geeft $\beta = -54,46...^\circ$
 $\alpha - \beta = 59,03...^\circ - (-54,46...^\circ) \approx 113,5^\circ$
Dus $\angle(p, q) \approx 180^\circ - 113,5^\circ = 66,5^\circ$.

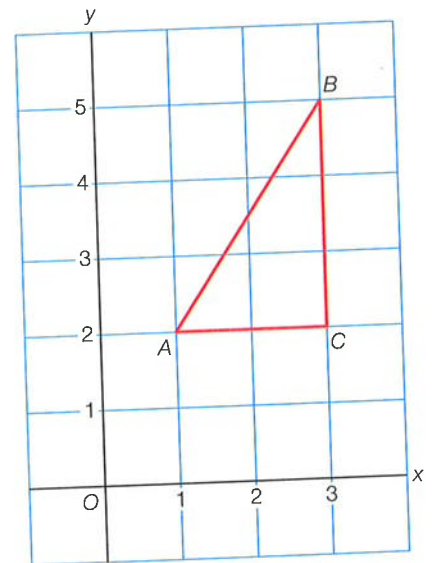
16 De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .
 $\tan(\alpha) = rc_k = 2$ geeft $\alpha = 63,43...^\circ$
 $\beta = \alpha + 20^\circ = 63,43...^\circ + 20^\circ = 83,43...^\circ$ en dit geeft $rc_l = \tan(83,43...^\circ) \approx 8,69$.
 $\beta = \alpha - 20^\circ = 63,43...^\circ - 20^\circ = 43,43...^\circ$ en dit geeft $rc_l = \tan(43,43...^\circ) \approx 0,95$.

- 17** De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .
 $k: 2x - 5y = 9$
 $-5y = -2x + 9$
 $y = \frac{2}{5}x - 1\frac{4}{5}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{2}{5}$ geeft $\alpha = 21,80\dots^\circ$
 $\beta = 21,80\dots^\circ + 60^\circ = 81,80\dots^\circ$ geeft $\text{rc}_l = \tan(81,80\dots^\circ) = 6,94\dots$
 $\beta = 21,80\dots^\circ - 60^\circ = -38,19\dots^\circ$ geeft $\text{rc}_l = \tan(-38,19\dots^\circ) = -0,78\dots$
 $S(2, -1)$ op l geeft $2a - b = 3$, dus $b = 2a - 3$.
 $l: ax + (2a - 3)y = 3$
 $(2a - 3)y = -ax + 3$
 $y = \frac{-a}{2a - 3}x + \frac{3}{2a - 3}$, dus $\text{rc}_l = \frac{-a}{2a - 3}$.
 $\frac{-a}{2a - 3} = 6,94\dots$
 $\frac{-a}{2a - 3} = -0,78\dots$
 $6,94\dots(2a - 3) = -a$
 $-0,78(2a - 3) = -a$
 $13,88\dots a - 20,82\dots = -a$
 $-1,57\dots a + 2,36\dots = -a$
 $14,88\dots a = 20,82\dots$
 $-0,57\dots a = -2,36\dots$
 $a = 1,39\dots$
 $a = 4,11\dots$
 $a = 1,39\dots$ geeft $b = 2 \cdot 1,39\dots - 3 \approx -0,20$
 $a = 4,11\dots$ geeft $b = 2 \cdot 4,11\dots - 3 \approx 5,23$
Dus $a \approx 1,40$ en $b \approx -0,20$ of $a \approx 4,11$ en $b \approx 5,23$.

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Bladzijde 101

- 18 a** In $\triangle ABC$ geeft de stelling van Pythagoras
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 $AB^2 = 2^2 + 3^2$
 $AB^2 = 13$
 $AB = \sqrt{13}$
b $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$
 $M(2, 3\frac{1}{2})$
c $x_N = \frac{1}{2}(83 + 89) = 86$ en $y_N = \frac{1}{2}(61 + 69) = 65$, dus $N(86, 65)$.



Bladzijde 102

- 19 a** $d(A, B) = \sqrt{(12 - 0)^2 + (7 - 12)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$
b $M_1(\frac{1}{2}(0 + -2), \frac{1}{2}(-2 + 7)) = M_1(-1, 2\frac{1}{2})$
c $d(A, B) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
 $d(A, M_2) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$
d $M_3(\frac{1}{2}(0 + p), \frac{1}{2}(p + 7)) = M_3(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$
e $d(A, B) = \sqrt{(p - 0)^2 + (7 - p)^2} = \sqrt{p^2 + 49 - 14p + p^2} = \sqrt{2p^2 - 14p + 49}$
20 a $M(\frac{1}{2}(p + p + 2), \frac{1}{2}(3 + 2p)) = M(p + 1, p + 1\frac{1}{2})$
b $d(A, B) = \sqrt{(p + 2 - p)^2 + (2p - 3)^2} = \sqrt{2^2 + 4p^2 - 12p + 9} = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$
c Voer in $y_1 = \sqrt{4x^2 - 12x + 13}$ en $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 3,79$
Dus $p \approx 3,79$.

21 a $x_M = 10$
 $\frac{1}{2}(3 + p + 5) = 10$
 $\frac{1}{2}p + 4 = 10$
 $\frac{1}{2}p = 6$
 $p = 12$

$$y_M = \frac{1}{2}(4 + 14) = 9$$

b $M(\frac{1}{2}(3 + p + 5), \frac{1}{2}(4 + p + 2))$
 $M(\frac{1}{2}p + 4, \frac{1}{2}p + 3)$
 $M \text{ op } k: y = 2x - 3$

$$\left. \begin{array}{l} M(\frac{1}{2}p + 4, \frac{1}{2}p + 3) \\ M \text{ op } k: y = 2x - 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2(\frac{1}{2}p + 4) - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \\ p + 8 - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \\ \frac{1}{2}p = -2 \\ p = -4 \end{array}$$

c $d = \sqrt{(p + 5 - 3)^2 + (p + 2 - 4)^2} = \sqrt{(p + 2)^2 + (p - 2)^2} = \sqrt{p^2 + 4p + 4 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{2p^2 + 8}$
Dus $a = 2$ en $b = 8$.

22 a $k: 2x - y = 2$
 $-y = -2x + 2$
 $y = 2x - 2$
 $rc_k = 2$
 $l: x + 2y = 3$
 $2y = -x + 3$
 $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
 $rc_l = -\frac{1}{2}$

b Er geldt $rc_k \cdot rc_l = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$, dus $k \perp l$.

Bladzijde 104

23 In de theorie gaat het over de breuken $-\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$, dus $b \neq 0$ en $a \neq 0$.

Als in de kernzin

- $b = 0$, dan is k een verticale lijn en l een horizontale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar;
- $a = 0$, dan is k een horizontale lijn en l een verticale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar.

Dus in de kernzin zijn de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$ niet nodig.

24 a $k \perp l$, dus $k: 3x + 2y = c$
door $A(4, 1)$ $\left. \begin{array}{l} k: 3x + 2y = c \\ \text{door } A(4, 1) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$
Dus $k: 3x + 2y = 14$.

b $m \perp n$, dus $m: 5x - 4y = c$
door $B(3, -1)$ $\left. \begin{array}{l} m: 5x - 4y = c \\ \text{door } B(3, -1) \end{array} \right\} c = 5 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 19$
Dus $m: 5x - 4y = 19$.

c $p \perp q$, dus $p: x + 2y = c$
door $C(-4, 3)$ $\left. \begin{array}{l} p: x + 2y = c \\ \text{door } C(-4, 3) \end{array} \right\} c = -4 + 2 \cdot 3 = 2$
 $x + 2y = 2$
 $2y = -x + 2$
 $y = -\frac{1}{2}x + 1$
Dus $p: y = -\frac{1}{2}x + 1$.

25 a $rc_k = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$\frac{1}{2} \cdot rc_l = -1$$

$$rc_l = -2$$

$$l: y = -2x + b \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 6 \\ \text{door } C(4, 6) \end{array} \right. \begin{array}{l} -8 + b = 6 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + 14$.

b $rc_m = \frac{-6-4}{2-3} = \frac{-10}{-1} = 10$

$$n \perp m, \text{ dus } rc_m \cdot rc_n = -1.$$

$$10 \cdot rc_n = -1$$

$$rc_n = -\frac{1}{10}$$

$$n: y = \frac{1}{10}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{10} \cdot 3 + b = 7 \\ \text{door } F(3, 7) \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{1}{10} + b = 7 \\ b = 6\frac{9}{10} \end{array}$$

$$y = \frac{1}{10}x + 6\frac{9}{10}$$

$$2y = x + 13\frac{8}{10}$$

$$-x + 2y = 13\frac{8}{10}$$

Dus $n: x - 2y = -13\frac{8}{10}$.

26 a De lijn p gaat door A en staat loodrecht op k .

$$p: x - 2y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 6 - 2 \cdot 0 = 6 \\ \text{door } A(6, 0) \end{array} \right.$$

Dus $p: x - 2y = 6$.

k en p snijden geeft het punt A' .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right. \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 10 \\ x & = & 2 \\ 2x + y & = & 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 2 \\ 4 + y = 2 \\ y & = & -2 \end{array} \right.$$

Dus $A'(2, -2)$.

$$d(A, k) = d(A, A') = \sqrt{(2-6)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

b De lijn q gaat door B en staat loodrecht op l .

$$rc_l \cdot rc_q = -1 \text{ geeft } \frac{1}{2} \cdot rc_q = -1, \text{ dus } rc_q = -2.$$

$$q: y = -2x + b \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 0 \\ \text{door } B(3, 0) \end{array} \right. \begin{array}{l} -6 + b = 0 \\ b = 6 \end{array}$$

Dus $q: y = -2x + 6$.

l en q snijden geeft het punt B' .

$$\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 6$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

Dus $B'(2, 2)$.

$$d(B, l) = d(B, B') = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

- c De lijn r gaat door O en staat loodrecht op m .

$$\left. \begin{array}{l} r: x - 3y = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{array} \right\} c = 0$$

Dus $r: x - 3y = 0$ oftewel $r: x = 3y$.

m en r snijden geeft het punt C .

Substitutie van $x = 3y$ in $3x + y = 10$ geeft $3 \cdot 3y + y = 10$

$$10y = 10$$

$$y = 1$$

$y = 1$ geeft $x = 3$

Dus $C(3, 1)$.

$$d(O, m) = d(O, C) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Bladzijde 105

- 27 De lijn k door de punten $A(-5, -3)$ en $B(-2, 6)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{6-(-3)}{-2-(-5)} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 3x + b \\ \text{door } B(-2, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot (-2) + b = 6 \\ -6 + b = 6 \\ b = 12 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x + 12$.

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k .

$rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $3 \cdot rc_l = -1$ dus $rc_l = -\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(2, -12) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 2 + b = -12 \\ -\frac{2}{3} + b = -12 \\ b = -11\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{3}x - 11\frac{1}{3}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$3x + 12 = -\frac{1}{3}x - 11\frac{1}{3}$$

$$3\frac{1}{3}x = -23\frac{1}{3}$$

$$10x = -70$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -7 \\ y = 3x + 12 \end{array} \right\} y = 3 \cdot (-7) + 12 = -9$$

Dus $D(-7, -9)$.

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(-7-2)^2 + (-9-(-12))^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

- 28 a De lijn k door $A(1, 0)$ en $B(7, 4)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{4-0}{7-1} = \frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k .

$rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $\frac{2}{3} \cdot rc_l = -1$, dus $rc_l = -\frac{3}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{3}{2}x + b \\ \text{door } C(3\frac{1}{2}, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + b = 6 \\ -\frac{21}{4} + b = 6 \\ b = 11\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} &= -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4} \\ 8x - 8 &= -18x + 135 \\ 26x &= 143\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}x &= 5\frac{1}{2} \\ y &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\end{aligned} \right\} y = \frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 3$$

Dus $D(5\frac{1}{2}, 3)$.

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\text{b } d(A, B) = \sqrt{(7 - 1)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

- 29** De lijnen k en l zijn evenwijdig, dus de afstand tussen k en l is gelijk aan de afstand van een punt van k tot l .

Neem het punt $A(1, 0)$ op k .

De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{aligned}m \perp k, \text{ dus } m: 3x + y = c \\ \text{door } A(1, 0)\end{aligned} \right\} c = 3 + 0 = 3$$

Dus $m: 3x + y = 3$.

l en m snijden geeft het punt B .

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{aligned}x - 3y &= 6 \\ 3x + y &= 3\end{aligned} \right. \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right. &\text{ geeft } \left\{ \begin{aligned}x - 3y &= 6 \\ 9x + 3y &= 9\end{aligned} \right. + \\ &10x = 15 \\ &x = 1\frac{1}{2} \\ &\left. \begin{aligned}x &= 1\frac{1}{2} \\ 3x + y &= 3\end{aligned} \right\} &\begin{aligned}3 \cdot 1\frac{1}{2} + y &= 3 \\ 4\frac{1}{2} + y &= 3 \\ y &= -1\frac{1}{2}\end{aligned}\end{aligned}$$

Dus $B(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

$$d(k, l) = d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 1)^2 + (-1\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

- 30** a $m \perp k: ax + by = c$, dus $m: bx - ay = c$.

$$\left. \begin{aligned}m: bx - ay = c \\ \text{door } O(0, 0)\end{aligned} \right\} c = 0$$

Dus $m: bx - ay = 0$

$$-ay = -bx$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

- b $k: ax + by = c$

$$by = -ax + c$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$$\begin{aligned}m \text{ snijden met } k \text{ geeft } \frac{b}{a}x &= -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ b^2x &= -a^2x + ac \\ (a^2 + b^2)x &= ac\end{aligned}$$

$$x = \frac{ac}{a^2 + b^2}$$

$$x = \frac{ac}{a^2 + b^2} \text{ geeft } y = \frac{b}{a} \cdot \frac{ac}{a^2 + b^2} = \frac{bc}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Dus } R\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right).$$

In $l: ax + by = ax_P + by_P$ is $c = ax_P + by_P$.

Gebruik het resultaat hierboven.

$$\text{Zo krijg je } S\left(\frac{a(ax_P + by_P)}{a^2 + b^2}, \frac{b(ax_P + by_P)}{a^2 + b^2}\right) = S\left(\frac{a^2x_P + aby_P}{a^2 + b^2}, \frac{abx_P + b^2y_P}{a^2 + b^2}\right).$$

c $d(S, R) = \sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2}$ en dit geeft

$$d(S, R) = \sqrt{\left(\frac{a^2 x_P + aby_P - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{abx_P + b^2 y_P - bc}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Herleiden geeft } d(S, R) &= \sqrt{\frac{(a^2 x_P + aby_P - ac)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(abx_P + b^2 y_P - bc)^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(a^2 x_P + aby_P - ac)^2 + (abx_P + b^2 y_P - bc)^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(a(ax_P + by_P - c))^2 + (b(ax_P + by_P - c))^2}}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\text{d } d(S, R) = \frac{\sqrt{(aE)^2 + (bE)^2}}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{a^2 E^2 + b^2 E^2}}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2}$$

$$\text{e } d(S, R) = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{E^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{E^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} d(P, k) &= d(S, R) \\ d(S, R) &= \frac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ E &= ax_P + by_P - c \end{aligned} \right\} d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bladzijde 107

31 a $k: ax + by = c$ door $B(5, 0)$ geeft $5a = c$, dus $k: ax + by = 5a$ oftewel $k: ax + by - 5a = 0$.
Je krijgt één vergelijking met twee onbekenden.

b $k: x + by = c$ door $B(5, 0)$ geeft $5 = c$, dus $k: x + by = 5$ oftewel $k: x + by - 5 = 0$.
Je had dus ook uit kunnen gaan van $k: x + by = c$.

$k: ax + by = 1$ door $B(5, 0)$ geeft $5a = 1$ oftewel $a = \frac{1}{5}$, dus $k: \frac{1}{5}x + by = 1$ oftewel

$k: \frac{1}{5}x + by - 1 = 0$.

Je had dus ook uit kunnen gaan van $k: ax + by = 1$.

$$32 \quad d(A, k) = \frac{|1 - 4 \cdot -1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}} = \frac{9}{17}\sqrt{17}$$

$$d(B, k) = \frac{|2 - 4 \cdot 3\frac{1}{2} + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}\sqrt{17}$$

$$d(C, k) = \frac{|6 - 4 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{17}\sqrt{17}$$

Het punt B ligt het dichtst bij de lijn k .

$$33 \quad \text{a } d(A, k) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|16|}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$\text{b } l: y = -2x + 5 \text{ oftewel } l: 2x + y - 5 = 0 \text{ geeft } d(B, l) = \frac{|2 \cdot 4 + -1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\text{c } m: \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \text{ oftewel } m: x + 3y - 6 = 0 \text{ geeft } d(C, m) = \frac{|5 + 3 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8}{10}\sqrt{10} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

- 34 a** Stel $k: y = ax + b$.
 k door $(0, 4)$ geeft $b = 4$, dus $k: y = ax + 4$ oftewel $k: ax - y + 4 = 0$.

$$d(B, k) = 5 \text{ geeft } \frac{|5\frac{1}{2}a - 5 + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5$$

$$|5\frac{1}{2}a - 1| = 5\sqrt{a^2 + 1}$$

$$30\frac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25(a^2 + 1)$$

$$30\frac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25a^2 + 25$$

$$5\frac{1}{4}a^2 - 11a - 24 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 5\frac{1}{4} \cdot -24 = 625$$

$$a = \frac{11 \pm 25}{10\frac{1}{2}} = 3\frac{3}{7} \vee a = \frac{11 - 25}{10\frac{1}{2}} = -1\frac{1}{3}$$

Dus $k_1: y = 3\frac{3}{7}x + 4$ en $k_2: y = -1\frac{1}{3}x + 4$.

- b** Stel $l: y = ax + b$.
 $(3, 0)$ op l geeft $3a + b = 0$, dus $b = -3a$.
 $k: y = ax - 3a$ oftewel $ax - y - 3a = 0$

$$d(D, l) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|6a - 4 - 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$|3a - 4| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$9a^2 - 24a + 16 = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 - 24a + 11 = 0$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 400$$

$$a = \frac{24 \pm 20}{8} = 5\frac{1}{2} \vee a = \frac{24 - 20}{8} = \frac{1}{2}$$

$a = 5\frac{1}{2}$ geeft $b = -16\frac{1}{2}$, dus $l_1: y = 5\frac{1}{2}x - 16\frac{1}{2}$.

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = -1\frac{1}{2}$, dus $l_2: y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

- 35** $P(-2, 3)$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 3 \text{ geeft } \frac{|5 \cdot -2 + 12 \cdot 3 - c|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 3$$

$$\frac{|26 - c|}{\sqrt{169}} = 3$$

$$\frac{|26 - c|}{13} = 3$$

$$|26 - c| = 39$$

$$26 - c = 39 \vee 26 - c = -39$$

$$c = -13 \vee c = 65$$

Dus $l_1: 5x + 12y = -13$ en $l_2: 5x + 12y = 65$.

- 36 a** Stel $l: 3x + 4y = c$.
 $P(4, 0)$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 2 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\frac{|12 - c|}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\frac{|12 - c|}{5} = 2$$

$$|12 - c| = 10$$

$$12 - c = 10 \vee 12 - c = -10$$

$$c = 2 \vee c = 22$$

Dus $l_1: 3x + 4y = 2$ en $l_2: 3x + 4y = 22$.

b Stel $P(p, 0)$.

$$d(P, k) = 3 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot p + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

$$\frac{|3p - 12|}{\sqrt{25}} = 3$$

$$\frac{|3p - 12|}{5} = 3$$

$$|3p - 12| = 15$$

$$3p - 12 = 15 \vee 3p - 12 = -15$$

$$3p = 27 \vee 3p = -3$$

$$p = 9 \vee p = -1$$

Dus $P_1(9, 0)$ en $P_2(-1, 0)$.37 Stel een punt op de parabool is $P(p, 2p^2)$.

$$d(P, k) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|p - 2 \cdot 2p^2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|p - 4p^2 - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|-4p^2 + p - 2| = 5$$

$$-4p^2 + p - 2 = 5$$

$$-4p^2 + p - 7 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot -7 = -111$$

geen opl.

$$\vee -4p^2 + p - 2 = -5$$

$$\vee -4p^2 + p + 3 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot 3 = 49$$

$$p = \frac{-1 \pm 7}{-8} = -\frac{3}{4} \vee p = \frac{-1 \pm 7}{-8} = 1$$

Dus $P_1(-\frac{3}{4}, 1\frac{1}{8})$ en $P_2(1, 2)$.38 Stel $k: ax + by = 1$.

$$d(A, k) = \sqrt{2} \wedge d(B, k) = 2\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|4a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} \wedge \frac{|6a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$|4a - 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \wedge |6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Substitutie van $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ in $|6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ geeft

$$|6a - 1| = 2 \cdot |4a - 1|$$

$$|6a - 1| = |8a - 2|$$

$$6a - 1 = 8a - 2 \vee 6a - 1 = -8a + 2$$

$$-2a = -1 \vee 14a = 3$$

$$a = \frac{1}{2} \vee a = \frac{3}{14}$$

Substitutie van $a = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} = |2 - 1|$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + 2b^2} = 1$$

$$\frac{1}{2} + 2b^2 = 1$$

$$2b^2 = \frac{1}{2}$$

$$b^2 = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$$

Substitutie van $a = \frac{3}{14}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{196} + b^2} = |\frac{6}{7} - 1|$

$$\sqrt{\frac{9}{98} + 2b^2} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{9}{98} + 2b^2 = \frac{1}{49}$$

$$2b^2 = -\frac{7}{98}$$

$$b^2 = -\frac{7}{196}$$

geen opl.

Dus $k_1: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$ en $k_2: \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$ oftewel $k_1: x + y = 2$ en $k_2: x - y = 2$.

7.3 Cirkelvergelijkingen

Bladzijde 109

- 39** a Dit volgt rechtstreeks uit de formule van de afstand tussen twee punten.
 b Als de afstand van $P(x, y)$ tot $M(1, 4)$ gelijk is aan 5, dan ligt P op de cirkel met middelpunt M en straal 5.
 c Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10 is $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10^2$, oftewel $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 100$.
 d Middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{16} = 4$.

Bladzijde 110

- 40** a $c_1: (x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$
 b $c_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ } $r^2 = (0-3)^2 + (0-4)^2 = 9 + 16 = 25$
 door $O(0, 0)$
 Dus $c_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.
 c $c_3: (x+3)^2 + (y-5)^2 = r^2$ } $r^2 = (-1+3)^2 + (2-5)^2 = 4 + 9 = 13$
 door $A(-1, 2)$
 Dus $c_3: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 13$.
 d c_4 raakt de x -as, dus $r = d(M_4, x\text{-as}) = 1$.
 $c_4: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
 e c_5 raakt de y -as, dus $r = d(M_5, y\text{-as}) = 4$.
 $c_5: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

- 41** De cirkels raken de x -as en de straal is 2, dus $y_M = -2$ of $y_M = 2$.
 M op k , dus $M_1(-6, -2)$ en $M_2(6, 2)$.
 $c_1: (x+6)^2 + (y+2)^2 = 4$ en $c_2: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$

Bladzijde 111

- 42** De cirkels raken de y -as en de straal is 10, dus $x_M = -10$ of $x_M = 10$.
 M op k , dus $M_1(-10, 6)$ en $M_2(10, -6)$.
 $c_1: (x+10)^2 + (y-6)^2 = 100$ en $c_2: (x-10)^2 + (y+6)^2 = 100$

- 43** a Middelpunt A en c_1 raakt de x -as, dus $r = d(A, x\text{-as}) = 7$.
 $c_1: (x-3)^2 + (y-7)^2 = 49$
 b Middelpunt B en c_2 door A , dus straal is $d(A, B) = \sqrt{(9-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$.
 $c_2: (x-9)^2 + (y-1)^2 = 72$
 c Middellijn AB , dus middelpunt is het midden van AB , dus $M_3(6, 4)$.
 De straal is $d(A, M_3) = \sqrt{(6-3)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$.
 $c_3: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 18$
 d De cirkels raken de y -as en de straal is 2, dus $x_M = -2$ of $x_M = 2$.
 $x_M = -2$ en M op k geeft $5 \cdot -2 + 2y_M = 12$
 $-10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 22$
 $y_M = 11$
 Dus $M_4(-2, 11)$ en $c_4: (x+2)^2 + (y-11)^2 = 4$.
 $x_M = 2$ en M op k geeft $5 \cdot 2 + 2y_M = 12$
 $10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 2$
 $y_M = 1$
 Dus $M_5(2, 1)$ en $c_5: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

- 44 a** Middellijn QR , dus middelpunt is het midden van QR , dus $M(1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.

$$\text{De straal is } d(Q, M) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - -2)^2 + (6\frac{1}{2} - 6)^2} = \sqrt{12\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{12\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Dus } c: (x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 6\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} c \text{ door } P(-1, p) \text{ geeft } (-2\frac{1}{2})^2 + (p - 6\frac{1}{2})^2 &= 12\frac{1}{2} \\ 6\frac{1}{4} + (p - 6\frac{1}{2})^2 &= 12\frac{1}{2} \\ (p - 6\frac{1}{2})^2 &= 6\frac{1}{4} \\ p - 6\frac{1}{2} &= 2\frac{1}{2} \vee p - 6\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2} \\ p &= 9 \vee p = 4 \end{aligned}$$

- b** Middellijn PR , dus middelpunt is het midden van PR , dus $M(2, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$.

De straal is

$$d(R, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (\frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2} - 7)^2} = \sqrt{9 + (\frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 12\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}}.$$

$$\text{Dus } c: (x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} c \text{ door } Q(-2, 6) \text{ geeft } (-4)^2 + (2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p)^2 &= \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4} \\ 16 + 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}p^2 &= \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4} \\ p &= -1 \end{aligned}$$

45 $c: (x - p)^2 + (y - q)^2 = 13$

$$A(4, -1) \text{ op } c \text{ geeft } (4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = 13.$$

$$B(-1, -2) \text{ op } c \text{ geeft } (-1 - p)^2 + (-2 - q)^2 = 13.$$

$$\text{Hieruit volgt } (4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = (-1 - p)^2 + (-2 - q)^2$$

$$16 - 8p + p^2 + 1 + 2q + q^2 = 1 + 2p + p^2 + 4 + 4q + q^2$$

$$-2q = 10p - 12$$

$$q = -5p + 6$$

$$q = -5p + 6 \text{ substitueren in } (4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = 13 \text{ geeft } (4 - p)^2 + (5p - 7)^2 = 13$$

$$16 - 8p + p^2 + 25p^2 - 70p + 49 - 13 = 0$$

$$26p^2 - 78p + 52 = 0$$

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$(p - 1)(p - 2) = 0$$

$$p = 1 \vee p = 2$$

$$p = 1 \text{ geeft } q = -5 \cdot 1 + 6 = 1 \text{ en } p = 2 \text{ geeft } q = -5 \cdot 2 + 6 = -4.$$

$$\text{Dus } (p = 1 \wedge q = 1) \vee (p = 2 \wedge q = -4).$$

- 46 a** Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k , dus $r = d(M, k)$.

$$\text{b } d(M, k) = \frac{|3 - 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\text{Dus } c: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

- 47 a** $k: y = x$ oftewel $k: x - y = 0$

$$r = d(M_1, k) = \frac{|5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Dus } c_1: (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 2.$$

$$\text{b } r = d(M_2, m) = \frac{|-1 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\text{Dus } c_2: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

Bladzijde 112

48 a $r = d(M_1, k) = \frac{|2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|13|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

Dus $c_1: (x-8)^2 + (y-3)^2 = 13$.

- b De cirkels raken de x -as en straal = 8, dus $y_M = -8$ of $y_M = 8$.

$y_M = -8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot -8 = 12$

$$2x_M - 24 = 12$$

$$2x_M = 36$$

$$x_M = 18$$

Dus $M_2(18, -8)$ en $c_2: (x-18)^2 + (y+8)^2 = 64$.

$y_M = 8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot 8 = 12$

$$2x_M + 24 = 12$$

$$2x_M = -12$$

$$x_M = -6$$

Dus $M_3(-6, 8)$ en $c_3: (x+6)^2 + (y-8)^2 = 64$.

- c k snijden met de x -as geeft $A(6, 0)$.

k snijden met de y -as geeft $B(0, 4)$.

M_4 is het midden van AB , dus $M_4(3, 2)$.

$$r = d(A, M_4) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Dus $c_4: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.

49 a $r_1 = d(M, k) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

Dus $c_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = (3\sqrt{5})^2$ oftewel $c_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 45$.

k snijden met de x -as geeft $A(10, 0)$.

k raakt c_1 , dus $MB \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} MB: 2x + y = c \\ \text{door } M(-1, 2) \end{array} \right\} c = 2 \cdot -1 + 2 = 0$$

Dus $MB: 2x + y = 0$ oftewel $MB: y = -2x$.

MB snijden met k geeft $x - 2 \cdot -2x = 10$

$$x + 4x = 10$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -2x \end{array} \right\} y = -4$$

Dus $B(2, -4)$.

$$r_2 = d(A, B) = \sqrt{(2-10)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

Dus $c_2: (x-10)^2 + y^2 = 80$.

- b Het midden van AM is $M_3(4\frac{1}{2}, 1)$.

$$r_3 = d(A, M_3) = \sqrt{(4\frac{1}{2}-10)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{30\frac{1}{4}+1} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$$

Dus $c_3: (x-4\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 31\frac{1}{4}$.

$x = 2$ en $y = -4$ invullen in de vergelijking van c_3 geeft $(-2\frac{1}{2})^2 + (-5)^2 = 31\frac{1}{4}$

$$6\frac{1}{4} + 25 = 31\frac{1}{4}$$

Dit klopt, dus c_3 gaat door B .

- 50** Lijnen l evenwijdig met k op afstand 5 van k .

Stel $l: 3x - 4y = c$.

$P(0, -2\frac{1}{2})$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 5 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot -2\frac{1}{2} - c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

$$\frac{|10 - c|}{\sqrt{25}} = 5$$

$$\frac{|10 - c|}{5} = 5$$

$$|10 - c| = 25$$

$$10 - c = 25 \vee 10 - c = -25$$

$$c = -15 \vee c = 35$$

Dus $l_1: 3x - 4y = -15$ en $l_2: 3x - 4y = 35$.

De middelpunten van de cirkels zijn de snijpunten van l_1 en l_2 met de lijn m door A die loodrecht staat op k .

$$m \perp k, \text{ dus } m: 4x + 3y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 4 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 5 \end{array} \right.$$

Dus $m: 4x + 3y = 5$.

$$l_1 \text{ en } m \text{ snijden geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = -15 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x - 12y = -45 \\ 16x + 12y = 20 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 25x & & = -25 \\ x = -1 & & \\ 4x + 3y = 5 & \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot -1 + 3y = 5 \\ y = 3 \end{array} \right. & \end{array}$$

Dus snijpunt $(-1, 3)$.

$$l_2 \text{ en } m \text{ snijden geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = 35 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x - 12y = 105 \\ 16x + 12y = 20 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 25x & & = 125 \\ x = 5 & & \\ 4x + 3y = 5 & \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 5 + 3y = 5 \\ y = -5 \end{array} \right. & \end{array}$$

Dus snijpunt $(5, -5)$.

Dus de vergelijkingen van deze cirkels zijn $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

51 $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$
 $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 36$
 $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$

Bladzijde 113

52 a $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 4 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Dus van c_1 is het middelpunt $(-3, 2)$ en de straal 3.

b $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 + 10y + 31 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 + 31 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$

Dus van c_2 is het middelpunt $(4, -5)$ en de straal $\sqrt{10}$.

c $x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
 $x^2 + 5x + y^2 + 3y + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 = 5\frac{1}{2}$
Dus van c_3 is het middelpunt $(-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ en de straal $\sqrt{5\frac{1}{2}}$.

d $x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$
 $x^2 - 7x + y^2 + 8y = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y + 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 28\frac{1}{4}$
Dus van c_4 is het middelpunt $(3\frac{1}{2}, -4)$ en de straal $\sqrt{28\frac{1}{4}}$.

53 a $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(-3, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.

b $d(A, M) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$
 A ligt binnen c want $d(A, M) < r$.

c $d(B, M) = \sqrt{(-3 - -3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$
 B ligt buiten c want $d(B, M) > r$.

d $d(C, M) = \sqrt{(-3 - -2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$
 C ligt op c want $d(C, M) = r$.

54 a $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(3, 4)$.

$d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
 $d(A, M) < r$, dus A ligt binnen c_1 .

b $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 18$
Dus $r = \sqrt{18}$ en $M(4, 2)$.

$d(O, M) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
 $d(O, M) > r$, dus O ligt buiten c_2 .

c $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
Dus $r = \sqrt{10}$ en $M(-2, 3)$.

$d(B, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
 $d(B, M) = r$, dus B ligt op c_3 .

55 a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$
 $(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 12 = 0$
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(-2, 3)$.

$$d(P, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-p)^2} = \sqrt{9 + (p-3)^2}$$

$$d(P, M) = r \text{ geeft } \sqrt{9 + (p-3)^2} = 5$$

$$\sqrt{9 + 9 - 6p + p^2} = 5$$

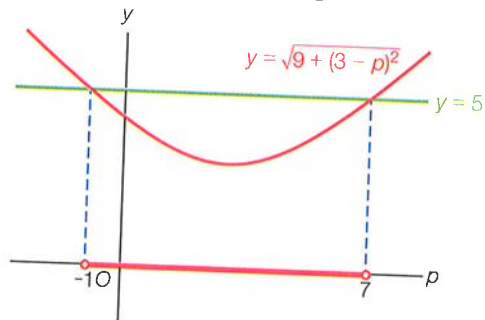
$$\sqrt{p^2 - 6p + 18} = 5$$

$$p^2 - 6p + 18 = 25$$

$$p^2 - 6p - 7 = 0$$

$$(p+1)(p-7) = 0$$

$$p = -1 \vee p = 7$$



$$d(P, M) < 5 \text{ geeft } -1 < p < 7$$

Dus voor $-1 < p < 7$ ligt P binnen c_1 .

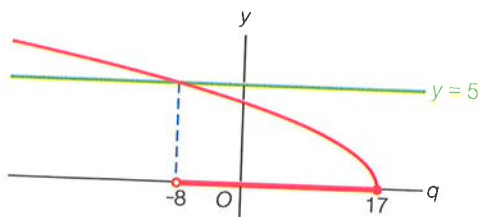
b $x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 2y + q = 0$
 $(x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + q = 0$
 $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 17 - q$
Dus $r = \sqrt{17 - q}$ en $M(4, 1)$.

$$d(Q, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(Q, M) = r \text{ geeft } 5 = \sqrt{17 - q}$$

$$25 = 17 - q$$

$$q = -8$$



$$d(Q, M) > r \text{ oftewel } 5 > \sqrt{17 - q} \text{ geeft } -8 < q \leq 17.$$

Dus voor $-8 < q \leq 17$ ligt Q buiten c_2 .

56 $x^2 + y^2 + ax + by = 71$

$$x^2 + ax + y^2 + by = 71$$

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 = 71$$

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71$$

Van c is het middelpunt $M(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ en de straal $r = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71}$.

$M(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ op $k: x + 2y = 1$ geeft $-\frac{1}{2}a - b = 1$ oftewel $b = -\frac{1}{2}a - 1$.

De straal is 10 geeft $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71} = 10$ oftewel $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71 = 100$.

$b = -\frac{1}{2}a - 1$ substitueren in $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71 = 100$ geeft $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}a - 1)^2 + 71 = 100$

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}a^2 + a + 1) + 71 = 100$$

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} + 71 = 100$$

$$\frac{5}{16}a^2 + \frac{1}{4}a - 28\frac{3}{4} = 0$$

$$5a^2 + 4a - 460 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot -460 = 9216$$

$$a = \frac{-4 + 96}{10} = 9\frac{1}{5} \vee a = \frac{-4 - 96}{10} = -10$$

$a = 9\frac{1}{5}$ geeft $b = -\frac{1}{2} \cdot 9\frac{1}{5} - 1 = -5\frac{3}{5}$ en $a = -10$ geeft $b = -\frac{1}{2} \cdot -10 - 1 = 4$.

Dus $(a = 9\frac{1}{5} \wedge b = -5\frac{3}{5}) \vee (a = -10 \wedge b = 4)$.

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

Bladzijde 115

57 a $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 18 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 18 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

$$\text{Dus } M(5, 3) \text{ en } r = \sqrt{16} = 4.$$

b $d(P, M) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$d(P, M) > r$, dus P ligt buiten c .

$$d(Q, M) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$d(Q, M) > r$, dus Q ligt buiten c .

c $5 < \sqrt{26}$, dus P ligt dichterbij het middelpunt M dan Q .
Dus $d(P, c) < d(Q, c)$.

Bladzijde 116

58 a $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

$$\text{Dus } M(3, 2) \text{ en } r = \sqrt{10}.$$

$$d(A, M) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$d(A, c) = r - d(A, M) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$$

b $d(B, M) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$d(B, c) = d(B, M) - r = 5 - \sqrt{10}$$

c $d(C, M) = \sqrt{(3 - 9)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$$d(C, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

59 M op k , dus $2 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 3\frac{1}{2}$.

Dus de straal r_1 van c_1 is $3\frac{1}{2}$ en $M(2, 3\frac{1}{2})$.

N op k , dus $8 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 2$.

Dus de straal r_2 van c_2 is 2 en $N(8, 2)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{36 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{38\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

$$\text{Dus } d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} - 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} - 5\frac{1}{2}.$$

Bladzijde 117

60 a $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Dus $M(3, 1)$ en $r_1 = 1$.

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 36 = 0$$

$$(x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 36 = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Dus $N(6, 2)$ en $r_2 = 2$.

$$d(M, N) = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\text{Dus } d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{10} - 1 - 2 = \sqrt{10} - 3.$$

b $d(M, l) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$, dus $d(M, l) = r_1$, dus l raakt c_1 .

$$d(N, l) = \frac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$
, dus $d(N, l) = r_2$, dus l raakt c_2 .

c $r_3 = d(P, l) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{25}} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$

$$\text{Dus } c_3: (x-2)^2 + (y-5)^2 = (2\frac{4}{5})^2 \text{ oftewel } c_3: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 7\frac{21}{25}.$$

61 $d(M, N) = \sqrt{(9-4)^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$$\text{De straal van } c_1 \text{ heeft lengte } d(M, k) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$\text{Er geldt } d(M, N) = 2 + 2r + r, \text{ dus } 2 + 2r + r = 13$$

$$3r = 11$$

$$r = 3\frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } c_2: (x-9)^2 + (y+10)^2 = (3\frac{2}{3})^2 \text{ oftewel } c_2: (x-9)^2 + (y+10)^2 = 13\frac{4}{9}.$$

62 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Dus $r = 3$ en $M(-2, 1)$.

$$d(M, k) = \frac{|2 \cdot -2 + 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Dus } d(k, c) = d(M, k) - r = 2\sqrt{5} - 3.$$

63 $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$
 $x^2 + 8x + y^2 + 2y - 8 = 0$
 $(x+4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 - 8 = 0$
 $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(-4, -1)$.
 $l: y = -3x + 17$ oftewel $l: 3x + y - 17 = 0$
 $d(M, l) = \frac{|3 \cdot -4 - 1 - 17|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-30|}{\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$
 $d(l, c) = d(M, l) - r = 3\sqrt{10} - 5$
Is $3\sqrt{10} - 5 < 5$ oftewel $\sqrt{90} < 10$?
Ja, dit klopt, dus $d(l, c) < r$.

Bladzijde 118

64 Stel $r_1 = x$, dan is $r_2 = 2x$, $r_3 = 3\frac{1}{2}x$ en $d(c_1, c_2) = 2r_3 - 2r_1 - 2r_2 = 7x - 2x - 4x = x$.
opp $c_1 = \pi x^2$
opp $c_2 = \pi(2x)^2 = 4\pi x^2$
opp $c_3 = \pi(3\frac{1}{2}x)^2 = 12\frac{1}{4}\pi x^2$
opp gekleurde gebied = opp $c_3 - \text{opp } c_1 - \text{opp } c_2 = 12\frac{1}{4}\pi x^2 - \pi x^2 - 4\pi x^2 = 7\frac{1}{4}\pi x^2$
opp gekleurde gebied = π geeft $7\frac{1}{4}\pi x^2 = \pi$

$$x^2 = \frac{1}{7\frac{1}{4}} = \frac{4}{29}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{29}} = \frac{2}{29}\sqrt{29}$$

Dus $d(c_1, c_2) = \frac{2}{29}\sqrt{29}$.

65 a $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$
 $A(5, 2)$ $\left. \begin{array}{l} (5-2)^2 + (2-1)^2 = 10 \\ 3^2 + 1^2 = 10 \\ 10 = 10 \end{array} \right\}$
klopt

Dus A op c .

b $M(2, 1)$ en $A(5, 2)$, dus $rc_l = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$.
c k staat loodrecht op l geeft $\frac{1}{3} \cdot rc_k = -1$, dus $rc_k = -3$.
 $k: y = -3x + b$
door $A(5, 2)$ $\left. \begin{array}{l} -3 \cdot 5 + b = 2 \\ -15 + b = 2 \end{array} \right\}$
 $b = 17$
Dus $k: y = -3x + 17$.

Bladzijde 119

66 a Stel $l: y = ax + b$.
Lijn m door M en B heeft $rc_m = \frac{1 - -1}{3 - 2} = 2$, dus $a = rc_l = -\frac{1}{2}$.
 $l: y = -\frac{1}{2}x + b$
door $B(2, -1)$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ -1 + b = -1 \end{array} \right\}$
 $b = 0$
Dus $l: y = -\frac{1}{2}x$.
b De straal van c is $r = \sqrt{5}$.
 $n: y = 2x$ oftewel $n: 2x - y = 0$
 $d(M, n) = \frac{|2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 $d(M, n) = r$, dus $n: y = 2x$ raakt aan c .

c De x -as snijden, dus $y = 0$ geeft $(x - 3)^2 + (-1)^2 = 5$
 $(x - 3)^2 + 1 = 5$
 $(x - 3)^2 = 4$
 $x - 3 = 2 \vee x - 3 = -2$
 $x = 5 \vee x = 1$

Dus $x_C = 1$.

Stel $p: y = ax + b$.

Lijn m door M en C heeft $rc_m = \frac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$, dus $a = rc_p = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} p: y = -2x + b \\ \text{door } C(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $p: y = -2x + 2$.

Bladzijde 120

67 a Substitutie van $x = 3$ in de vergelijking van c geeft $9 + y^2 - 36 + 11 = 0$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4 \vee y = -4$$

$y_A > y_B$, dus $A(3, 4)$ en $B(3, -4)$.

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + y^2 + 11 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 25$$

Dus $M(6, 0)$ en $r = 5$.

Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{0-4}{6-3} = -\frac{4}{3}$, dus $rc_k = \frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 3 + b = 4 \\ 2\frac{1}{4} + b = 4 \\ b = 1\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{0-(-4)}{6-3} = \frac{4}{3}$, dus $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } B(3, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -4 \\ -2\frac{1}{4} + b = -4 \\ b = -1\frac{3}{4} \end{array}$$

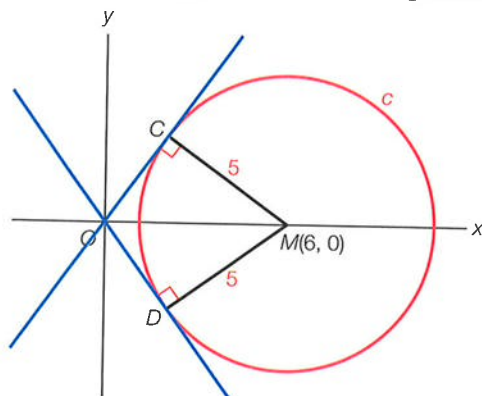
Dus $l: y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$.

b $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36,86...^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86...^\circ$

Dus $\angle(k, l) = 36,86...^\circ - (-36,86...^\circ) \approx 74^\circ$.

c De raaklijnen door O raken c in de punten C en D .



In $\triangle OMC$ is $\angle C = 90^\circ$, $OM = 6$ en $CM = 5$.

$\sin(\angle MOC) = \frac{5}{6}$ geeft $\angle MOC = 56,4...^\circ$

$\angle DOC = 2 \cdot \angle MOC = 2 \cdot 56,4...^\circ \approx 113^\circ$

De hoek tussen de raaklijnen door O is ongeveer $180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$.

68 a $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$
 $(x+3)^2 - 9 + (y-3)^2 - 9 - 7 = 0$
 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$
 Dus $M(-3, 3)$ en $r = 5$.
 $y = 0$ geeft $x^2 + 6x - 7 = 0$
 $(x-1)(x+7) = 0$
 $x = 1 \vee x = -7$

Dus $A(-7, 0)$ en $B(1, 0)$.

$$rc_{MA} = \frac{3-0}{-3-7} = -\frac{3}{10}$$

$k \perp MA$, dus $rc_k = \frac{10}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{4}{3}x + b \\ \text{door } A(-7, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{3} \cdot -7 + b = 0 \\ \frac{28}{3} + b = 0 \\ b = -9\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{4}{3}x - 9\frac{1}{3}$.

$$rc_{MB} = \frac{0-3}{1-7} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$l \perp MB$, dus $rc_l = \frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{4}{3}x + b \\ \text{door } B(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{4}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$.

b $x = 0$ geeft $y^2 - 6y - 7 = 0$
 $(y+1)(y-7) = 0$
 $y = -1 \vee y = 7$

Dus $C(0, -1)$ en $D(0, 7)$.

$$rc_{MC} = \frac{-1-3}{0-7} = -\frac{4}{7}$$

$p \perp MC$, dus $rc_p = \frac{7}{4}$.

$$p: y = \frac{3}{4}x + b \text{ door } C(0, -1), \text{ dus } p: y = \frac{3}{4}x - 1.$$

$$rc_{MD} = \frac{7-3}{0-7} = -\frac{4}{7}$$

$q \perp MD$, dus $rc_q = \frac{7}{4}$.

$$q: y = -\frac{3}{4}x + b \text{ door } D(0, 7), \text{ dus } q: y = -\frac{3}{4}x + 7.$$

c $rc_k = -\frac{10}{3}$ geeft richtingshoek $\alpha_k = -53,13...^\circ$

$$rc_l = \frac{2}{3} \text{ geeft richtingshoek } \alpha_l = 33,7...^\circ$$

$$\alpha_l - \alpha_k = 33,7...^\circ - (-53,13...^\circ) = 86,86...^\circ$$

$$\angle(k, l) = 180^\circ - 86,86...^\circ = 93,13...^\circ$$

$$rc_p = \frac{7}{4} \text{ geeft richtingshoek } \alpha_p = 60,26...^\circ$$

$$rc_q = -\frac{7}{4} \text{ geeft richtingshoek } \alpha_q = -60,26...^\circ$$

$$\alpha_p - \alpha_q = 60,26...^\circ - (-60,26...^\circ) = 120,52...^\circ$$

$$\angle(p, q) = 180^\circ - 120,52...^\circ = 59,47...^\circ$$

Dus de hoek tussen k en l is gelijk aan de hoek tussen p en q .

- 69 a** $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 12 = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 12 = 0$
 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 17$
 Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{17}$.
 $y = 0$ geeft $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x+2)(x-6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$
 Dus $A(-2, 0)$ en $B(6, 0)$.
 $rc_{MA} = \frac{-1-0}{2-2} = -\frac{1}{4}$
 $k \perp MA$, dus $rc_k = 4$ en dit geeft richtingshoek $\alpha = 75,96...^\circ$
 $rc_{MC} = \frac{-1-3}{2-1} = -4$
 $m \perp MC$, dus $rc_m = \frac{1}{4}$ en dit geeft richtingshoek $\beta = 14,03...^\circ$
 $\alpha - \beta = 75,96...^\circ - 14,03...^\circ \approx 62^\circ$
 Dus $\angle(k, m) \approx 62^\circ$.
- b** $rc_{MA} = -\frac{1}{4}$ geeft $\angle BAM = 14,03...^\circ$
 Ook $\angle ABM = 14,03...^\circ$.
 Dus $\angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot 14,03...^\circ \approx 152^\circ$.
- c** $m: y = \frac{1}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{3}{4} \end{array} \right.$
 door $C(1, 3)$
 Dus $m: y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$.
 $rc_{MB} = \frac{0-1}{6-2} = \frac{1}{4}$
 $l \perp MB$, dus $rc_l = -4$.
 $l: y = -4x + b \left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ b = 24 \end{array} \right.$
 door $B(6, 0)$
 Dus $l: y = -4x + 24$.
 l en m snijden geeft $-4x + 24 = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$
 $-4\frac{1}{4}x = -21\frac{1}{4}$
 $x = 5$
 $y = -4x + 24 \left\{ \begin{array}{l} y = -4 \cdot 5 + 24 = 4 \end{array} \right.$
 Dus $D(5, 4)$.
 $d(D, M) = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$
 $d(D, c) = d(D, M) - r = \sqrt{34} - \sqrt{17}$

- 70 a** De straal van c is $r = \sqrt{5}$.
 k raakt c , dus geldt $d(M, k) = r = \sqrt{5}$.
- b** $k: y = \frac{1}{2}x + b$
 $-\frac{1}{2}x + y - b = 0$
 $x - 2y + 2b = 0$
- c** Het middelpunt van c is $M(2, 3)$.
 $d(M, k) = \frac{|2 - 2 \cdot 3 + 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2b - 4|}{\sqrt{5}}$
 $d(M, k) = \sqrt{5}$ geeft $\frac{|2b - 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ en hieruit volgt $|2b - 4| = 5$.
- d** $|2b - 4| = 5$ geeft $2b - 4 = 5 \vee 2b - 4 = -5$
 $2b = 9 \vee 2b = -1$
 $b = 4\frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$
 Dus $k_1: y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ en $k_2: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Bladzijde 122

- 71 a** Van c is $M(0, 0)$ en $r = \sqrt{10}$.
 Stel $l: y = 3x + b$ oftewel $l: 3x - y + b = 0$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|b| = 10 \\ b = 10 \vee b = -10$$

Dus $l_1: y = 3x + 10$ en $l_2: y = 3x - 10$.

- b** Stel $m: y = ax + b$.
 $A(10, 0)$ op m geeft $10a + b = 0$, dus $b = -10a$.
 $m: y = ax - 10a$ oftewel $m: ax - y - 10a = 0$

$$d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|a \cdot 0 - 0 - 10a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-10a| = \sqrt{10a^2 + 10} \\ 100a^2 = 10a^2 + 10 \\ 90a^2 = 10 \\ a^2 = \frac{1}{9}$$

$$a = \frac{1}{3} \vee a = -\frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ geeft } b = -10 \cdot \frac{1}{3} = -3\frac{1}{3}, \text{ dus } m_1: y = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}.$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ geeft } b = -10 \cdot -\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}, \text{ dus } m_2: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}.$$

- 72 a** Stel $k: y = ax + b$.
 $O(0, 0)$ is het middelpunt van c .

$$\text{Lijn } p \text{ door } O \text{ en } A \text{ heeft } rc_p = \frac{0 - -1}{0 - -4} = \frac{1}{4}, \text{ dus } a = rc_k = -4.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -4x + b \\ \text{door } A(-4, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot -4 + b = -1 \\ 16 + b = -1 \\ b = -17 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -4x - 17.$$

- b** Loodrecht op $l: 4x - y = 3$, dus $m: x + 4y = c$.

$$d(O, m) = r \text{ geeft } \frac{|0 + 4 \cdot 0 - c|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \sqrt{17}$$

$$\frac{|-c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$|-c| = 17$$

$$-c = 17 \vee -c = -17$$

$$c = -17 \vee c = 17$$

$$\text{Dus } m_1: x + 4y = -17 \text{ en } m_2: x + 4y = 17.$$

- c** Door $(0, 17)$, dus $n: y = ax + 17$ oftewel $n: ax - y + 17 = 0$.

$$d(M, n) = r \text{ geeft } \frac{|a \cdot 0 - 0 + 17|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$$

$$\frac{17}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$$

$$\sqrt{17a^2 + 17} = 17$$

$$17a^2 + 17 = 289$$

$$17a^2 = 272$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4 \vee a = -4$$

$$\text{Dus } n_1: y = 4x + 17 \text{ en } n_2: y = -4x + 17.$$

73 a $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 19 = 0$
 $(x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 + 19 = 0$
 $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 10$
 $M(5, 2)$ is het middelpunt van c .
 Stel $k: y = ax + b$.

Lijn n door M en A heeft $rc_n = \frac{2-5}{5-4} = -3$, dus $a = rc_k = \frac{1}{3}$.

$$k: y = \frac{1}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 4 + b = 5 \\ 1\frac{1}{3} + b = 5 \end{array} \right.$$

$$b = 3\frac{2}{3}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

b Stel $l: y = 3x + b$ oftewel $l: 3x - y + b = 0$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 5 - 2 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|13 + b| = 10$$

$$13 + b = 10 \vee 13 + b = -10$$

$$b = -3 \vee b = -23$$

Dus $l_1: y = 3x - 3$ en $l_2: y = 3x - 23$.

c Stel $m: y = ax + b$.

$B(9, 0)$ op m geeft $9a + b = 0$, dus $b = -9a$.

$m: y = ax - 9a$ oftewel $m: ax - y - 9a = 0$

$$d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|5a - 2 - 9a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-4a - 2| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$16a^2 + 16a + 4 = 10a^2 + 10$$

$$6a^2 + 16a - 6 = 0$$

$$3a^2 + 8a - 3 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{-8 \pm 10}{6} = \frac{1}{3} \vee a = \frac{-8 - 10}{6} = -3$$

$a = \frac{1}{3}$ geeft $b = -9 \cdot \frac{1}{3} = -3$, dus $m_1: y = \frac{1}{3}x - 3$.

$a = -3$ geeft $b = -9 \cdot -3 = 27$, dus $m_2: y = -3x + 27$.

74 a $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 12 = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0$
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$
 $M(1, 2)$ is het middelpunt van c .
 Stel $k: y = ax + b$.

Lijn p door M en A heeft $rc_p = \frac{2-1}{1-3} = \frac{1}{2}$, dus $a = rc_k = -4$.

$$k: y = -4x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot -3 + b = 1 \\ 12 + b = 1 \end{array} \right.$$

$$b = -11$$

Dus $k: y = -4x - 11$.

b Loodrecht op $m: 4x - y = 1$, dus $l: x + 4y = c$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|1 + 4 \cdot 2 - c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$|9 - c| = 17$$

$$9 - c = 17 \vee 9 - c = -17$$

$$-c = 8 \vee -c = -26$$

$$c = -8 \vee c = 26$$

Dus $l_1: x + 4y = -8$ en $l_2: x + 4y = 26$.

- c Stel $n: y = ax + b$.
 $B(6, -1)$ op n geeft $6a + b = -1$, dus $b = -6a - 1$.
 $n: y = ax - 6a - 1$ oftewel $n: ax - y - 6a - 1 = 0$

$$d(M, n) = r \text{ geeft } \frac{|a - 2 - 6a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$$

$$|-5a - 3| = \sqrt{17a^2 + 17}$$

$$25a^2 + 30a + 9 = 17a^2 + 17$$

$$8a^2 + 30a - 8 = 0$$

$$4a^2 + 15a - 4 = 0$$

$$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot -4 = 289$$

$$a = \frac{-15 \pm 17}{8} = \frac{1}{4} \vee a = \frac{-15 - 17}{8} = -4$$

$a = \frac{1}{4}$ geeft $b = -6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -2\frac{1}{2}$, dus $n_1: y = \frac{1}{4}x - 2\frac{1}{2}$.
 $a = -4$ geeft $b = -6 \cdot -4 - 1 = 23$, dus $n_2: y = -4x + 23$.

75 $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 + 4y + 9 = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 + 9 = 0$
 $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$
Dus $M(5, -2)$ en $r = \sqrt{20}$.

Stel $k: y = ax + b$.
 $P(-1, -4)$ op k geeft $-a + b = -4$, dus $b = a - 4$.
 $k: y = ax + a - 4$ oftewel $k: ax - y + a - 4 = 0$

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|5a + 2 + a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{20}$$

$$|6a - 2| = \sqrt{20a^2 + 20}$$

$$36a^2 - 24a + 4 = 20a^2 + 20$$

$$16a^2 - 24a - 16 = 0$$

$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{3 \pm 5}{4} = 2 \vee a = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Dus $rc_{k_1} = -\frac{1}{2}$ en $rc_{k_2} = 2$.

$rc_{k_1} \cdot rc_{k_2} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, dus $k_1 \perp k_2$, dus $\angle APB = 90^\circ$.

k_1 raakt c in A , dus $\angle PAM = 90^\circ$ en $d(A, M) = d(M, k_1) = r = \sqrt{20}$.

k_2 raakt c in B , dus $\angle PBM = 90^\circ$ en $d(B, M) = d(M, k_2) = r = \sqrt{20}$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle APB = 90^\circ \\ \angle PAM = 90^\circ \\ \angle PBM = 90^\circ \\ d(A, M) = d(B, M) \end{array} \right\} AMBP \text{ is een vierkant.}$$

Bladzijde 123

76 $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 55 = 0$
 $x^2 - 14x + y^2 - 8y + 55 = 0$
 $(x - 7)^2 - 49 + (y - 4)^2 - 16 + 55 = 0$
 $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(7, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.

Stel $k: y = ax + b$.

$P(2, -1)$ op k geeft $2a + b = -1$, dus $b = -2a - 1$.

$k: y = ax - 2a - 1$ oftewel $k: ax - y - 2a - 1 = 0$

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|7a - 4 - 2a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|5a - 5| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$25a^2 - 50a + 25 = 10a^2 + 10$$

$$15a^2 - 50a + 15 = 0$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$$

$$a = \frac{10 \pm 8}{6} = 3 \vee a = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a = 3 \text{ geeft } b = -2 \cdot 3 - 1 = -7, \text{ dus } k_1: y = 3x - 7.$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ geeft } b = -2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -1\frac{2}{3}, \text{ dus } k_2: y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}.$$

$$AM \perp k_1, \text{ dus } rc_{AM} = -\frac{1}{3}.$$

$$AM: y = -\frac{1}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 7 + b = 4 \\ -2\frac{1}{3} + b = 4 \end{array} \right.$$

$$b = 6\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } AM: y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}.$$

$$k_1 \text{ snijden met } AM \text{ geeft}$$

$$3x - 7 = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$$

$$3\frac{1}{3}x = 13\frac{1}{3}$$

$$x = 4$$

$$x = 4 \text{ geeft } y = 3 \cdot 4 - 7 = 5$$

$$\text{Dus } A(4, 5).$$

$$N \text{ is het midden van } AB, \text{ dus } N(6, 3).$$

$$\text{De straal van } c_2 \text{ is } r_2 = d(A, N) = \sqrt{(6-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Dus } d(S, N) = 2\sqrt{2}.$$

$$d(P, N) = \sqrt{(6-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

$$d(P, N) = 2 \cdot d(S, N), \text{ dus } S \text{ is het midden van } NP.$$

$$BM \perp k_2, \text{ dus } rc_{BM} = -3.$$

$$BM: y = -3x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 7 + b = 4 \\ -21 + b = 4 \end{array} \right.$$

$$b = 25$$

$$\text{Dus } BM: y = -3x + 25.$$

$$k_2 \text{ snijden met } BM \text{ geeft}$$

$$\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} = -3x + 25$$

$$3\frac{1}{3}x = 26\frac{2}{3}$$

$$x = 8$$

$$x = 8 \text{ geeft } y = -3 \cdot 8 + 25 = 1$$

$$\text{Dus } B(8, 1).$$

Diagnostische toets

Bladzijde 126

1 a Snijden, dus $\frac{p}{-4} \neq \frac{-3}{p}$

$$p^2 \neq 12$$

$$p \neq \sqrt{12} \wedge p \neq -\sqrt{12}$$

$$p \neq 2\sqrt{3} \wedge p \neq -2\sqrt{3}$$

Dus voor $p \neq 2\sqrt{3} \wedge p \neq -2\sqrt{3}$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ hebben de lijnen een snijpunt.

b Evenwijdig, dus $\frac{p}{-4} = \frac{-3}{p} \neq \frac{q}{8}$.

Uit $\frac{p}{-4} = \frac{-3}{p}$ volgt $p = 2\sqrt{3} \vee p = -2\sqrt{3}$.

$$p = 2\sqrt{3} \text{ geeft } \frac{2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} \neq \frac{q}{8} \text{ oftewel } \frac{\sqrt{3}}{-2} \neq \frac{q}{8}, \text{ dus } q \neq \frac{8\sqrt{3}}{-2} = -4\sqrt{3}.$$

$$p = -2\sqrt{3} \text{ geeft } \frac{-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3}{-2\sqrt{3}} \neq \frac{q}{8} \text{ oftewel } \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{q}{8}, \text{ dus } q \neq \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Dus voor $p = 2\sqrt{3} \wedge q \neq -4\sqrt{3}$ en voor $p = -2\sqrt{3} \wedge q \neq 4\sqrt{3}$ zijn de lijnen evenwijdig.

- c (2, 8) op $k_{p,q}$ geeft $2p - 3 \cdot 8 = q$ oftewel $q = 2p - 24$.

$$(2, 8) \text{ op } l_p \text{ geeft } -4 \cdot 2 + 8p = 8$$

$$-8 + 8p = 8$$

$$8p = 16$$

$$p = 2$$

$$p = 2 \text{ geeft } q = 2 \cdot 2 - 24 = -20$$

Dus voor $p = 2$ en $q = -20$ snijden de lijnen elkaar in het punt (2, 8).

2 a $k: \frac{x}{2p} + \frac{y}{p+1} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{2p} + \frac{-3}{p+1} = 1 \\ 8(p+1) - 3 \cdot 2p = 2p(p+1) \\ 8p + 8 - 6p = 2p^2 + 2p \\ 2p^2 = 8 \\ p^2 = 4 \\ p = 2 \vee p = -2 \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} \end{array} \right.$

b $rc_l = \frac{2p+3-0}{0-5} = \frac{2p+3}{-5}$

Van de lijn door (2, 0) en (0, 3) is $rc = \frac{3-0}{0-2} = \frac{3}{-2} = -1\frac{1}{2}$.

De lijnen zijn evenwijdig, dus $\frac{2p+3}{-5} = -1\frac{1}{2}$

$$2p+3 = 7\frac{1}{2}$$

$$2p = 4\frac{1}{2}$$

$$p = 2\frac{1}{4}$$

c $rc_k = \frac{p+1-0}{0-2p} = \frac{p+1}{-2p}$

k en l zijn evenwijdig, dus $\frac{p+1}{-2p} = \frac{2p+3}{-5}$

$$-2p(2p+3) = -5(p+1)$$

$$-4p^2 - 6p = -5p - 5$$

$$4p^2 + p - 5 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5 = 81$$

$$p = \frac{-1 \pm 9}{8} = 1 \vee p = \frac{-1 - 9}{8} = -1\frac{1}{4}$$

vold.

vold.

3 a $k: y = 4x + 2$

$$\tan(\alpha) = rc_k = 4 \text{ geeft } \alpha = 75,96...^\circ$$

$$l: y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56...^\circ$$

$$\alpha - \beta = 75,96...^\circ - (-26,56...^\circ) \approx 102,5^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) \approx 180^\circ - 102,5^\circ = 77,5^\circ.$$

b $rc_m = \frac{0-2}{3-0} = \frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 33,69...^\circ$$

$$rc_n = \frac{0-5}{2-0} = -2\frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -68,19...^\circ$$

$$\alpha - \beta = 33,69...^\circ - (-68,19...^\circ) \approx 101,9^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(m, n) \approx 180^\circ - 101,9^\circ = 78,1^\circ.$$

c $p: 2x + 3y = 6 \text{ geeft } 3y = -2x + 6$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$\tan(\alpha) = rc_p = -\frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = -33,69...^\circ$$

$$q: y = 8x - 6$$

$$\tan(\beta) = rc_q = 8 \text{ geeft } \beta = 82,87...^\circ$$

$$\beta - \alpha = 82,87...^\circ - (-33,69...^\circ) \approx 116,6^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(p, q) \approx 180^\circ - 116,6^\circ = 63,4^\circ.$$

4 a $d(A, B) = \sqrt{(3-2p)^2 + (p+1-0)^2} = \sqrt{9-12p+4p^2+p^2+2p+1} = \sqrt{5p^2-10p+10}$

b $d(A, B) = 5$ geeft $\sqrt{5p^2-10p+10} = 5$

$$5p^2 - 10p + 10 = 25$$

$$5p^2 - 10p - 15 = 0$$

$$p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p+1)(p-3) = 0$$

$$p = -1 \vee p = 3$$

c Het midden van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(2p+3), \frac{1}{2}(0+p+1)) = M(p+1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+\frac{1}{2})$.

M op $x+y=6$ geeft $p+1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}=6$

$$1\frac{1}{2}p = 4$$

$$p = 2\frac{2}{3}$$

5 a $k \perp l$, dus $2x-3y=c$
door $A(2, -4)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} k \perp l \\ 2x-3y=c \end{matrix}} \right\} c = 2 \cdot 2 - 3 \cdot -4 = 16$

Dus $k: 2x-3y=16$.

b $m \perp n$, dus $rc_m=3$.

$m: y=3x+b$
door $B(2, 3)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} m \perp n \\ y=3x+b \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} 3 \cdot 2 + b = 3 \\ 6 + b = 3 \end{matrix}$

$$b = -3$$

Dus $m: y=3x-3$ oftewel $m: 3x-y=3$.

6 a $k: y=\frac{1}{3}x+10$ oftewel $k: \frac{1}{3}x-y+10=0$ oftewel $k: x-3y+30=0$

$$d(A, k) = \frac{|2-3 \cdot -6+30|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{50}{\sqrt{10}} = 5\sqrt{10}$$

b Stel $l: y=ax+b$.

l door $B(4, 0)$ geeft $4a+b=0$, dus $b=-4a$.

$l: y=ax-4a$ oftewel $l: ax-y-4a=0$

$$d(C, l) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|a-1-4a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$|-3a-1| = \sqrt{5a^2+5}$$

$$9a^2+6a+1 = 5a^2+5$$

$$4a^2+6a-4=0$$

$$2a^2+3a-2=0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2} \vee a = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$, dus $l_1: y = \frac{1}{2}x - 2$.

$a = -2$ geeft $b = -4 \cdot -2 = 8$, dus $l_2: y = -2x + 8$.

7 a Stel $l: x+2y=c$.

$A(6, 0)$ is een punt op k .

$$d(A, l) = 2\sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|6+2 \cdot 0-c|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{|6-c|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$|6-c| = 10$$

$$6-c = 10 \vee 6-c = -10$$

$$c = -4 \vee c = 16$$

Dus $l_1: x+2y=-4$ en $l_2: x+2y=16$.

b Stel $P(p, p)$.

$$d(P, k) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|p + 2 \cdot p - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|3p - 6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|3p - 6| = 5$$

$$3p - 6 = 5 \vee 3p - 6 = -5$$

$$3p = 11 \vee 3p = 1$$

$$p = \frac{11}{3} \vee p = \frac{1}{3}$$

Dus $P_1(3\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3})$ en $P_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.**Bladzijde 127**

- 8 a De straal is gelijk aan $d(A, B)$, dus $r = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$
 Dus $c_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 61$.
- b De cirkel heeft middelpunt B en raakt de y -as, dus $r = d(B, y\text{-as}) = 8$.
 Dus $c_2: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 64$.
- c Het middelpunt M van c_3 is het midden van het lijnstuk AB , dus
 $M(\frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(-3+2)) = M(5, -\frac{1}{2})$.
 De straal van c_3 is de helft van $d(A, B)$, dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{61}$. Dit geeft $r^2 = \frac{1}{4} \cdot 61 = 15\frac{1}{4}$.
 Dus $c_3: (x-5)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$.
- d De cirkel raakt de x -as in $C(5, 0)$, dus $x_M = 5$ en $M(5, r)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 6 \\ \text{door } M(5, r) \end{array} \right\} r = 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

 Dus $c_4: (x-5)^2 + (y-9)^2 = 81$.

- 9 $M(7, 8)$ geeft $c_1: (x-7)^2 + (y-8)^2 = r_1^2$

$$r_1 = d(M, k) = \frac{|2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$$

 Dus $c_1: (x-7)^2 + (y-8)^2 = (2\sqrt{13})^2$ oftewel $c_1: (x-7)^2 + (y-8)^2 = 52$.
 De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 3x - 2y = c \\ \text{door } M(7, 8) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$$

 Dus $l: 3x - 2y = 5$.

 k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right. \begin{array}{l} |2| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 24 \\ 9x - 6y = 15 \end{array} \right. +$$

$$13x = 39$$

$$x = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ 2x + 3y = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + 3y = 12 \\ 6 + 3y = 12 \\ 3y = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus $A(3, 2)$.Het midden van het lijnstuk AM is $N(5, 5)$ geeft $c_2: (x-5)^2 + (y-5)^2 = r_2^2$.

$$r_2 = d(A, N) = \sqrt{(5-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Dus $c_2: (x-5)^2 + (y-5)^2 = 13$.

10 $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$
 $x^2 - 16x + y^2 + 8y - 1 = 0$
 $(x - 8)^2 - 64 + (y + 4)^2 - 16 - 1 = 0$
 $(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 81$
 Dus $M(8, -4)$ en $r = 9$.

$$d(A, M) = \sqrt{(8 - 3)^2 + (-4 - -4)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5 < r$$

Dus A ligt binnen c .

$$d(B, M) = \sqrt{(8 - 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} > r$$

Dus B ligt buiten c .

$$d(C, M) = \sqrt{(8 - 8)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{0 + 81} = 9 = r$$

Dus C ligt op c .

11
$$d(M, k) = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 - 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

Uit $d(k, c_2) = d(k, M) - r_2$, $d(k, c_2) = 3$ en $d(k, M) = 5$ volgt $r_2 = 2$.

Dus $c_2: (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 4$.

$$x^2 + y^2 + 10y = 0$$

$$x^2 + (y + 5)^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + (y + 5)^2 = 25$$

Van c_1 is het middelpunt $N(0, -5)$ en de straal $r_1 = 5$.

$$d(M, N) = \sqrt{(0 - 5)^2 + (-5 - 7)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 13 - 5 - 2 = 6$$

12 a
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0 \\ x = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4^2 + y^2 - 4 \cdot 4 + 6y = 0 \\ 16 + y^2 - 16 + 6y = 0 \\ y^2 + 6y = 0 \\ y(y + 6) = 0 \\ y = 0 \vee y = -6 \end{array}$$

$y_A > y_B$, dus $A(4, 0)$ en $B(4, -6)$.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$$

Dus $M(2, -3)$ en $r = \sqrt{13}$.

$$rc_{MA} = \frac{0 - -3}{4 - 2} = \frac{3}{2}, \text{ dus } rc_k = -\frac{2}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 0 \\ -2\frac{2}{3} + b = 0 \\ b = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.

$$rc_{MB} = \frac{-6 - -3}{4 - 2} = -\frac{3}{2}, \text{ dus } rc_l = \frac{2}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } B(4, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 4 + b = -6 \\ 2\frac{2}{3} + b = -6 \\ b = -8\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{2}{3}x - 8\frac{2}{3}$.